NO
Date 26/04/2018

Μάθημα 8ο

__Πρόταση__: Αντιστρέψιμη ποσότητα υπάρχει πάντοτε όταν το τυχαίο δείγμα προέρχεται από πληθυσμό με συνεχή αθροιστική συνάρτηση κατανομής ως προς x. (χωρίς απόδειξη)

__Πρόταση__: Έστω $X_1, X_2, \ldots X_n$ τ.δ. από έναν πληθυσμό με συνεχή α.σ.κ. ως προς x.

__Τότε__:

$$(1)\quad Q_1 = -2\sum_{i=1}^{n} \log F(x_i,\theta) \sim X^2_{2n}$$

$$(2)\quad Q_2 = -2\sum_{i=1}^{n} \log\left[1-F(x_i,\theta)\right] \sim X^2_{2n}$$

Θα μπορέσω να βρω Δ.Ε. ελαχίστου μήκους; όχι. Εδώ μπορώ ίσων ουρών.

Το Δ.Ε. ελαχίστου μήκους είναι προτιμότερο όμως δεν μπορώ να το βρω πάντα.

__Απόδειξη.__

(1ο) Θέτω $Y_1 = F(x_i,\theta)$ και θα προσδιορίσω την κατανομή μέσω της α.σ.κ.

$$P(Y_1 \le y_1) = P(F(x_i,\theta) \le y_1) =$$

$$= P(x_i \le F^{-1}(y_1)) = F(F^{-1}(y_1)) = y_1$$

$$0 \le y_1 \le 1$$

Άρα $Y_1 = F(X_1,\theta) \sim U(0,1)$

NO.

Date

• Θέτω $Y_2 = -2\log Y_1$ και θα προσδιορίσω την κατ/μή.

$$P(Y_2 \leq y_2) = P(-2\log Y_1 \leq y_2) =$$

$$= P(\log Y_1 \geq -y_2/2) = P(Y_1 \geq e^{-y_2/2}) =$$

$$= 1 - P(Y_1 \leq e^{-y_2/2}) = 1 - e^{-y_2/2}, \quad y_2 \geq 0$$

Παίρνω την παράγωγο: $f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{2} e^{-y_2/2}, \quad y_2 \geq 0$

Είναι κάποια γνωστή κατανομή; → ΝΑΙ.

$$Y_2 \sim ΕΚΘ(1/2)$$

Άρα: $Q_1 = \sum_{i=1}^{n} Y_{2i}$ όπου $Y_{2i} \sim ΕΚΘ(1/2)$

Άρα $m_{Q_1}(t) \overset{ανεξ.}{=} m^n_{Y_2}(t) = \left(\frac{1/2}{1/2 - t}\right)^n, \quad t < 1/2$

$$= (1-2t)^{-n}, \quad t < 1/2 \qquad Γάμμα\left(\frac{2n}{2}, 2\right)$$

Η Γάμμα$(n, 2)$ είναι η X^2_{2n}

• Θέτω $Y_3 = 1 - F(X_i, \theta)$

$$P(Y_3 \leq y_3) = P(1 - F(X_i,\theta) \leq y_3) =$$
$$= P(F(X_i,\theta) \geq 1 - y_3) =$$
$$= 1 - P(F(X_i,\theta) \leq 1 - y_3) =$$
$$= 1 - (1 - y_3) = y_3, \quad 0 < y_3 < 1.$$

$$P(F(X_i,\theta) \leq 1 - y_3) = P(X_i \leq F^{-1}(1-y_3)) =$$
$$= F(F^{-1}(1-y_3))$$

NO.

Date

Άρα $Y_3 = 1 - F(X_i, \theta) \sim U(0,1)$

Όμοια με πριν έχω:

$Q_2 = -2\log\frac{1}{3} \sim Εκθ(1/2)$

$Q_3 = \Sigma Y_{3i} \sim G(n, 2)$

οπότε $-2\Sigma \log(1 - F(x_i, \theta)) \sim X^2_{2n}$.

Άσκηση:

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με $B(1,\theta)$

Βρείτε Δ.Ε. για την θ

Λύση.

(1) $f(x,\theta) = \theta \cdot x^{\theta - 1}, \quad 0 < x < 1$

Βρίσκω επαρκής: $\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \theta^n \prod x_i^{\theta - 1} =$

$= g(T = \prod x_i, \theta)\, h(x)$

Βρίσκω την α.σ.κ.: $F(x,\theta) = \int_0^x \theta y^{\theta-1} dy = y^\theta \Big|_0^x = x^\theta$

$0 < x < 1$

Τώρα Q_1 ή Q_2;

$\log X_i^\theta$ ή $\log(1 - X_i^\theta)$;

συμφέρει.

Άρα παίρνω: $-2\Sigma \log X_i^\theta \sim X^2_{2n}$

$-2\theta \Sigma \log X_i \sim X^2_{2n}$

$[-2\theta \log \prod X_i \sim X^2_{2n}]$

NO

Date

$$P\left(q_1 \le -2\sum \log X_i \le q_2\right) = 1-a$$

$$P\left(\frac{q_1}{-2\sum \log X_i} \le \Theta \le \frac{q_2}{-2\sum \log X_i}\right) = 1-a$$

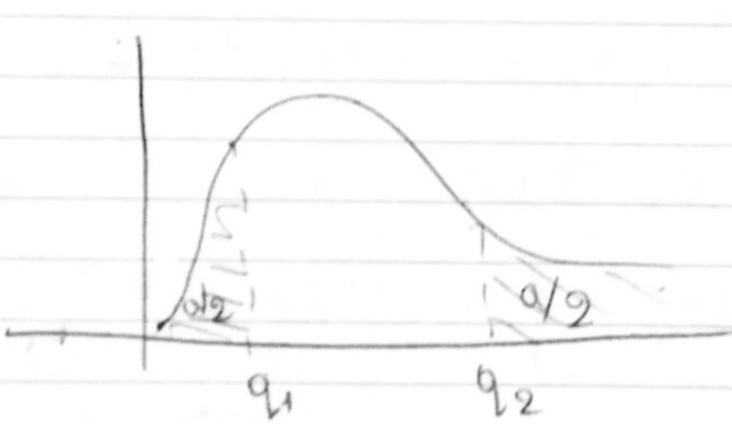
$$l = \frac{q_2 - q_1}{-2\sum \log X_i}$$

$$\left.\begin{aligned} P(Q_1 \le q_1) &= a/2 \\ P(Q_1 \ge q_2) &= a/2 \end{aligned}\right\} \text{μαζί έχω } \chi^2 \text{ κατ.}$$

. Δεν μπορώ να βρω Δ.Ε. ελαχίστου μήκους
Άρα παίω με ίσων ουρών.

Άρα $q_1 = \chi^2_{2n,\,1-a/2}$

$q_2 = \chi^2_{2n,\,a/2}$



NO

Date

Άσκηση

$X_1, X_2, \ldots X_n$ τ.δ. από την ομοιόμορφη $U(0,\theta)$

Βρείτε ΔΕ για το θ.

Λύση

Έχουμε $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 < x < \theta$

Θέλω επαρκή σ.σ.

Παρατηρώ ότι το π.ο. εξαρτάται από το θ.

$$\prod f(x_i,\theta) = \frac{1}{\theta^n} I(x_{(n)}, +\infty) = g(x_{(n)},\theta) \cdot h(x).$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < \theta \\ x_2 < \theta \\ \vdots \\ x_n < \theta \end{array}\right\} \Rightarrow X_{(n)} < \theta$$

Άρα η επαρκής σ.σ. $T(x) = X_{(n)}$

$$F_{X_{(n)}}(y) = P(X_{(n)} \leq y) = \ldots = P^n(X_i \leq y)$$
$$= F_X^n(y)$$

$$f_{X_{(n)}}(y) = n \cdot F_X^{n-1}(y) f_X(y)$$

$$f_{X_{(n)}}(y) = n\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} = n\frac{y^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 < y < \theta.$$

αντιστρεπτή

Δοκιμάζω την αντιστρεπτή να είναι: $Q = \frac{X_{(n)}}{\theta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow X_{(n)} = Q \cdot \theta \Rightarrow dX_{(n)} = \theta \cdot d\theta.$$

$$f_Q(q) = f_{X_{(n)}}(q\theta) \cdot |\theta| = n \cdot \left(\frac{q\theta}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} \cdot \theta$$

NO.

Date

$$= \underline{\underline{n q^{n-1}}} \quad , \; 0 < q < 1$$

$$0 < X_{(n)} < \Theta$$

$$0 < \frac{X_{(n)}}{\Theta} < 1.$$

<u>Οπότε:</u> $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. $U(0, \Theta)$, $f(x, \theta) = \frac{1}{\Theta}$, $0 < x < \Theta$

$$P\left(q_1 \leq \frac{X_{(n)}}{\Theta} \leq q_2\right) = 1 - a.$$

$$P\left(\frac{X_{(n)}}{q_2} \leq \Theta \leq \frac{X_{(n)}}{q_1}\right) = 1 - a.$$

$$l = X_{(n)} \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)$$

$$\frac{dl}{dq_2} = X_{(n)} \left(-\frac{1}{q_1^2} \cdot \frac{dq_1}{dq_2} + \frac{1}{q_2^2}\right).$$

$$F_Q(q_2) - F_Q(q_1) = 1 - a \xrightarrow{\text{παρ/ζω ως προς } q_2}$$

$$f_Q(q_2) - f_Q(q_1) \frac{dq_1}{dq_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{-f_Q(q_2)}{f_Q(q_1)}}$$

NO.

Date

$$\frac{dl}{dq_2} = X_{(n)}\left[-\frac{1}{q_1^2}\,\frac{q_2^{n-1}}{q_1^{n-1}} + \frac{1}{q_2^2}\right] =$$

$$= \frac{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}}{q_2^2 \cdot q_1^{n+1}} < 0$$

Φθίνουσα συνάρτηση ως προς q_2 ⇒

ελάχιστο στο κάτω άκρο

Άρα $q_2 = 1.$

Αν έβγαζα $q_1 = 1$ θα ήταν άτοπο γιατί δε θα είχε που να πάει το q_2.

Άρα: $P\left(q_1 \leq \frac{X_{(n)}}{\theta} \leq q_2\right) = 1-a \Rightarrow$

$$\Rightarrow P\left(\frac{X_{(n)}}{q_2} \leq \theta \leq \frac{X_{(n)}}{q_1}\right) = 1-a \Rightarrow$$

$$\int_{q_1}^{1} n q^{n-1}\,dq = 1-a \Rightarrow q_1 = a^{1/n}$$

Άρα: $\left(X_{(n)},\ X_{(n)}a^{-1/n}\right)$ ΔΕ.

NO.

Date

Αν ζητούσε Δ.Ε. ίσων ουρών:
θα προσδιορίσω τα q_1, q_2

$P(Q \leq q_1) = \alpha/2 \Rightarrow \int_0^{q_1} n q^{n-1}\, dq = \alpha/2$

$P(Q \geq q_2) = \alpha/2 \Rightarrow \int_{q_2}^{1} n q^{n-1}\, dq = \alpha/2$

$f_Q(q) = n q^{n-1}, \quad 0 < q < 1$

Άσκηση 2.6

$N(\mu, \sigma^2$ γνωστή$)$ n?
90% Δ.Ε. μ να έχει μήκος $\leq \sigma/5$

Λύση.

Υπενθύμιση: Δ.Ε. για μ κανονικού με σ^2 γνωστή:
$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$l = 2 z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$l \leq \sigma/5 \Rightarrow 2 z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \frac{\sigma}{5} \Rightarrow n \geq 269$$

$$z_{0.1/2} = z_{0.05} = 1.64$$

NO

Date

Ασκηση 2.2.

$N(\mu, \sigma^2 = 25)$ $\quad a?$

ε/ω το $\bar{X} \pm 8.2/\sqrt{n}$

το Δ.ε για το μ να είναι

Λύση.

$$z_{a/2} \frac{5}{\sqrt{n}} = 8.2 \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5 z_{a/2} = 8.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{a/2} = 1.64 \Rightarrow a = 10\%$$

Ασκηση 2.3.

X τ.μ. Εκθ $(1/\theta)$

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x}, \quad x > 0$$

$(0, kX)$ Δ.ε. για το θ με πιθανότητα $1-a$.

Μου ζητάει να βρω το k ε/ω. :

$$P(0 < \theta < kX) = 1 - a.$$

$$\Downarrow \qquad k > 0 \text{ αφού είναι στο Δ.ε.}$$

$$P(X > \theta/k) = 1 - a$$

$$\Rightarrow 1 - P(X < \theta/k) = 1 - a \Rightarrow 1 - F_X(\theta/k) = 1 - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - (1 - e^{-\frac{\theta}{k}\frac{1}{\theta}}) = 1 - a.$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-x/\theta}, \quad x \geq 0$$

$$1 - e^{-\frac{1}{k}} = a$$

$$1 - a = e^{-1/k} \rightarrow \boxed{-\frac{1}{k} = \ln(1-a)}$$

Ασκ. 24. εκτος.

NO

Date

Άσκηση 25.

$X_1, \dots, X_n$ τ.δ. $N(\theta, \theta)$, $\theta > 0$.
Δώστε ένα παράδειγμα μιας αντιστρεπτής ποσότητας και βρείτε το ΔΕ.

Λύση.

Ισχύουν: $N(\mu, \sigma^2)$, $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_n$$

Παίρνω: $\frac{\bar{X}-\theta}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, $\frac{(n-1)S^2}{\theta} \sim X^2_{n-1}$

Δ.Ε. ελαχ. μήκους ↑ θ μέση τιμή

ΔΕ. ίσων ουρών ↑ θ διακύμανση

αντιστρεπτές ποσότητες

Άσκηση 26.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με $\sqrt{VarX} = \sigma$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma(X_i-\bar{X})^2} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N\left(\sigma, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}\right)^2\right)$$

Θέλω Δ.Ε. για το σ

Λύση.

Είναι: $\frac{S-\sigma}{\sigma/\sqrt{2n}} \sim N(0,1)$

$$P\left(q_1 \le \frac{S-\sigma}{\sigma/\sqrt{2n}} \le q_2\right) = 1-a$$

$$P\left(q_1 \le \frac{S}{\sigma}\sqrt{2n} - \sqrt{2n} \le q_2\right) = 1-a$$

$$P\left(q_1 + \sqrt{2n} \le \frac{S\sqrt{2n}}{\sigma} \le q_2 + \sqrt{2n}\right) = 1-a.$$

$$P\left(\frac{S\sqrt{2n}}{q_2+\sqrt{2n}} \le \sigma \le \frac{S\sqrt{2n}}{q_1+\sqrt{2n}}\right) = 1-a.$$

Άσκηση 2.9.

$X_1, \dots, X_n$ τ.δ. $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$, $x \ge 0$

ΔΕ. για το θ;

Λύση

Θα προσδιορίσω την κατανομή του αθροίσματος ΣX_i

$$\left(\begin{array}{l} \Pi f(x_i,\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{\Sigma x_i}{\theta}} \\ T = \Sigma X_i \text{ επαρκής 6.6.} \end{array}\right)$$

$X_i \sim$ Εκθ$(1/\theta)$

$\Sigma X_i \sim$ Γάμμα(n,θ)

$$F(x,\theta) = \int_0^x \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta}\, dy = -e^{-y/\theta}\Big|_0^x = 1-e^{-x/\theta}$$

$x \ge 0$

Θα χρησιμοποιήσω την $Q_2 = -2\sum \log e^{-x_i/\theta} = \frac{2}{\theta}\Sigma X_i$

$\Rightarrow \quad Q_2 \sim \chi^2_{2n}$

NO

Date

$X_i \sim \text{Εκθ}(1/\theta)$

$\sum X_i \sim \text{Γαμμα}(n,\theta)$ Ροπογεννήτρια

$\frac{2}{\theta} \sum X_i \sim \text{Γαμμα}(n,2)$

$$P\left(q_1 \leq \frac{2}{\theta} \sum X_i \leq q_2\right) = 1-a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{2\sum X_i}{q_2} \leq \theta \leq \frac{2\sum X_i}{q_1}\right) = 1-a$$

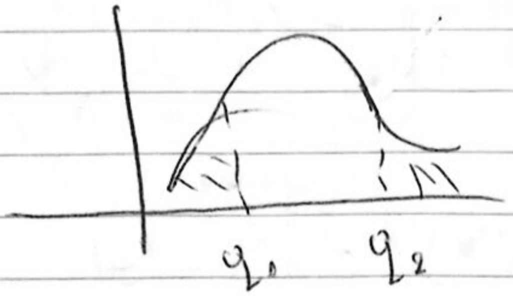
q_1, q_2: αδύνατος ο προσδιορισμός για Δ.Ε. ελαχίστου μήκους (X^2_{2n})

$P(Q \leq q_1) = a/2$

$P(Q \geq q_2) = a/2$

$\Rightarrow$ $q_1 = X^2_{2n, 1-a/2}$

$q_2 = X^2_{2n, a/2}$



NO.

Date

Άσκηση 2.10.

Εκθ(θ) ίδια με την άσκηση 2.9. με $\theta \to \frac{1}{\theta}$

Αντιστροφή: $2\theta \Sigma X_i \sim X^2_{2n}$

$P(q_1 \leq 2\theta \Sigma X_i \leq q_2) = 1-a$

$X_1 = 2.3$, $X_2 = 1.2$, $X_3 = 0.9$, $X_4 = 3.2$.

$$P\left(\frac{q_1}{2\Sigma X_i} \leq \theta \leq \frac{q_2}{2\Sigma X_i}\right) = 1-a.$$

κάτω άκρο: $\frac{q_1}{2\Sigma X_i} = \frac{X^2_{2n,1-a/2}}{2\Sigma X_i} = \frac{X^2_{8,0.95}}{2\Sigma X_i}$

Άνω άκρο: $\frac{q_2}{2\Sigma X_i} = \frac{X^2_{2n,a/2}}{2\Sigma X_i} = X^2_{8,0.05}$

Θέλω Δ.Ε 90% άρα 10%

Για το ΣX_i αθροίζω τα X_1, X_2, X_3, X_4

Άσκηση 2.11.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. θ_2 γνωστό

$$f(x,\theta_1,\theta_2) = \frac{\theta_2}{\theta_1} x^{\theta_2 - 1} = e^{-\frac{x^{\theta_2}}{\theta_1}}, \quad x>0$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_1,\theta_2) = \frac{\theta_2^n}{\theta_1^n} \prod x_i^{\theta_2-1} e^{-\frac{\Sigma x_i^{\theta_2}}{\theta_1}} =$$

$$= g(\Sigma x_i^{\theta_2}, \theta_1)\, h(x)$$

Θέτω $Y = X^{\theta_2} \Rightarrow X = y^{1/\theta_2}$

$$dx = \frac{1}{\theta_2} y^{\frac{1}{\theta_2}-1} dy$$

$$f_Y(y) = f_X(y^{1/\theta_2}) \left| \frac{1}{\theta_2} \cdot y^{\frac{1}{\theta_2}-1} \right|$$

$$f_Y(y) = \frac{\theta_2}{\theta_1} y^{\frac{1}{\theta_2}(\theta_2-1)} e^{-\frac{y}{\theta_1}} \frac{1}{\theta_2} y^{\frac{1}{\theta_2}-1}$$

$$= \frac{1}{\theta_1} e^{-y/\theta_1}, \quad y > 0.$$

$$Y \sim \text{Εκθ}\left(\frac{1}{\theta_1}\right)$$

$$T = \sum Y_i = \sum X_i^{\theta_2}$$

ροπογεννήτρια: $m_T(t) \overset{\text{ανεξ.}}{=} m_Y^n(t) = \left(\frac{\frac{1}{\theta_1}}{\frac{1}{\theta_1} - t} \right)^n, t < \frac{1}{\theta_1}$

$$= \left(\frac{\frac{1}{\theta_1} - t}{\frac{1}{\theta_1}} \right)^{-n}, \quad t < \frac{1}{\theta_1}$$

$$= (1 - \theta_1 t)^{-n}, \quad t < 1/\theta_1.$$

$$T = \sum Y_i = \sum X_i^{\theta_2} \sim \text{Γάμμα}(n, \theta_1)$$

$$Q = \frac{2}{\theta_1} T$$

NO.

Date

$$m_Q(t) = E\left(e^{T \frac{2}{\theta_1} t}\right) = m_T\left(\frac{2}{\theta_1} t\right)$$

$$= \left(1 - \theta_1 \frac{2}{\theta_1} t\right)^{-n}, \quad \frac{2}{\theta_1} < \frac{1}{\theta_1}$$

Γάμμα $(n, 2) = \chi^2_{2n}$

Άρα, $Q = \frac{2}{\theta_1} \sum X_i^{\theta_2} \sim \chi^2_{2n}$

$$P\left(q_1 \leq \frac{2}{\theta_1} \cdot \sum X_i^{\theta_2} \leq q_2\right) = 1 - a$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{2 \sum X_i^{\theta_2}}{q_2} \leq \theta_1 \leq \frac{2 \sum X_i^{\theta_2}}{q_1}\right) = 1 - a$$

$q_1 = \chi^2_{2n, 1-\frac{a}{2}}, \quad q_2 = \chi^2_{2n, a/2}$

$T = \sum Y_i = \sum X_i^{\theta_2} \sim$ Γάμμα (n, θ_1)

$$m_T(t) = E\left(e^{Tt}\right)$$

2^{os} Τρόπος

$$f(x, \theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_2}{\theta_1} x^{\theta_2 - 1} e^{-\frac{x^{\theta_2}}{\theta_1}}, \quad x > 0$$

$$F(x, \theta_1, \theta_2) = \int_0^x \frac{\theta_2}{\theta_1} y^{\theta_2 - 1} e^{-y/\theta_1} \, dy$$

$$= -e^{-\frac{y^{\theta_2}}{\theta_1}} \Big|_0^x$$

$$F(x, \theta_1, \theta_2) = 1 - e^{-\frac{x^{\theta_2}}{\theta_1}}, \quad x > 0$$

$$Q_2 = -2 \sum \log\left[1 - F(X_i, \theta)\right] \sim \chi^2_{2n} \leftarrow \text{απόδειξη}$$

$$Q_2 = -2 \sum \log e^{-\frac{X_i^{\theta_2}}{\theta_2}} = \frac{2}{\theta_1} \sum X_i^{\theta_2} \sim \chi^2_{2n}$$

ασκ. 2.13 και 2.15 εκτός

ασκ. 2.14 αργότερα. (+ 2.04)

<u>σπίτι:</u> 2.12, 2.7, 2.8